IAIC MiBACT DGBIC CREDA

Diritto Mercato Tecnologia

FONDATA E DIRETTA DA
Alberto M. Gambino

COMITATO DI DIREZIONE
Valeria Falce, Giusella Finocchiaro, Oreste Pollicino,
Giorgio Resta, Salvatore Sica

8 settembre 2025

La teoria dei grafi, ovvero come la Matematica può guidare la pianificazione urbana

Alberto Gambino, Marina Monsurrò, Lorenzo Mazza

COMITATO SCIENTIFICO
Guido Alpa, Fernando Bocchini, Giovanni Comandè, Gianluca Contaldi,
Vincenzo Di Cataldo, Giorgio Floridia, Gianpiero Gamaleri, Gustavo Ghidini,
Andrea Guaccero, Mario Libertini, Francesco Macario, Roberto Mastroianni,
Giorgio Meo, Cesare Mirabelli, Enrico Moscati, Alberto Musso, Luca Nivarra,
Gustavo Olivieri, Cristoforo Osti, Roberto Pardolesi, Giuliana Scognamiglio,
Giuseppe Sena, Vincenzo Zeno-Zencovich, Andrea Zoppini
E
Margarita Castilla Barea, Cristophe Geiger, Reto Hilty, Ian Kerr, Jay P. Kesan,
David Lametti, Fiona MacMillan, Maximiliano Marzetti, Ana Ramalho,
Maria Pàz Garcia Rubio, Patrick Van Eecke, Hong Xue

Nuova Editrice Universitaria

La rivista è stata fondata nel 2009 da Alberto M. Gambino ed è oggi pubblicata dall'Accademia Italiana del Codice di Internet (IAIC) sotto gli auspici del Ministero dei beni e delle attività culturali e del turismo - Direzione generale biblioteche e istituti culturali (DGBIC) e dell'Università Europea di Roma con il Centro di Ricerca di Eccellenza del Diritto d'Autore (CREDA). Tutti i diritti sono dell'IAIC.

Comitato dei Valutazione Scientifica

EMANUELA AREZZO (Un. Teramo), EMANUELE BILOTTI (Un. Europea di Roma), FERNANDO BOCCHINI (Un. Federico II), ROBERTO BOCCHINI (Un. Parthenope), ORESTE CALLIANO (Un. Torino), LOREDANA CARPENTIERI (Un. Parthenope), LUCIANA D'ACUNTO (Un. Federico II), VIRGILIO D'ANTONIO (Un. Salerno), FRANCESCO DI CIOMMO (Luiss), MARILENA FILIPPELLI (Un. Tuscia), CESARE GALLI (Un. Parma), MARCO MAUGERI (Un. Europea di Roma), ENRICO MINERVINI (Seconda Un.), GILBERTO NAVA (Un. Europea di Roma), MARIA CECILIA PAGLIETTI (Un. Roma Tre), ANNA PAPA (Un. Parthenope), ANDREA RENDA (Un. Cattolica), ANNARITA RICCI (Un. Chieti), FRANCESCO RICCI (Un. LUM), GIOVANNI MARIA RICCIO (Un. Salerno), CRISTINA SCHEPISI (Un. Parthenope), BENEDETTA SIRGIOVANNI (Un. Tor Vergata), GIORGIO SPEDICATO (Un. Bologna), ANTONELLA TARTAGLIA POLCINI (Un. Sannio), RAFFAELE TREQUATTRINI (Un. Cassino), DANIELA VALENTINO (Un. Salerno), FILIPPO VARI (Un. Europea di Roma), ALESSIO ZACCARIA (Un. Verona).

Norme di autodisciplina

1. La pubblicazione dei contributi sulla rivista "Diritto Mercato Tecnologia" è subordinata alla presentazione da parte di almeno un membro del Comitato di Direzione o del Comitato Scientifico e al giudizio positivo di almeno un membro del Comitato per la Valutazione Scientifica, scelto per rotazione all'interno del medesimo, tenuto conto dell'area tematica del contributo. I contributi in lingua diversa dall'italiano potranno essere affidati per il referaggio ai componenti del Comitato Scientifico Internazionale. In caso di pareri contrastanti il Comitato di Direzione assume la responsabilità circa la pubblicazione.
2. Il singolo contributo è inviato al valutatore senza notizia dell'identità dell'autore.
3. L'identità del valutatore è coperta da anonimato.
4. Nel caso che il valutatore esprima un giudizio positivo condizionato a revisione o modifica del contributo, il Comitato di Direzione autorizza la pubblicazione solo a seguito dell'adeguamento del saggio.

La Rivista adotta un Codice etico e di buone prassi della pubblicazione scientifica conforme agli standard elaborati dal Committee on Publication Ethics (COPE): Best Practice Guidelines for Journal Editors.

Comitato di Redazione – www.dimt.it – dimt@unier.it

ANTONINA ASTONE, MARCO BASSINI, CHANTAL BOMPREZZI, VALENTINA DI GREGORIO, GIORGIO GIANNONE CODIGLIONE, FERNANDA FAINI, MASSIMO FARINA, ILARIA GARACI, SILVIA MARTINELLI, DAVIDE MULA (Coordinatore), ALESSIO PERSIANI, MARTINA PROVENZANO (Vice-Coordinatore), MARIA PIA PIGNALOSA, MATILDE RATTI, ANDREA STAZI (Coordinatore)

Sede della Redazione

Accademia Italiana del Codice di Internet, Via dei Tre Orologi 14/a, 00197 Roma, tel. 06.8088855, fax 06.8070483, www.iaic.it, info@iaic.it

LA TEORIA DEI GRAFI, OVVERO COME LA MATEMATICA PUÒ GUIDARE LA PIANIFICAZIONE URBANA

Alberto Gambino, Marina Monsurrò, Lorenzo Mazza

Abstract: Infrastrutture, utilities e servizi di welfare vanno oggi ripensati per renderli sostenibili e resilienti ed i modelli matematici possono fornire un importante contributo in tal senso. Sotto il profilo della disciplina vigente, il ricorso ad un supporto matematico e tecnologico, ed in generale la digitalizzazione nella progettazione e gestione delle infrastrutture, sono fortemente incoraggiati dalla normativa più recente. In questo articolo, ci si concentrerà sui problemi legati alla viabilità stradale che può essere efficacemente modellizzata tramite la teoria dei grafi. La teoria dei grafi, infatti, consente la numerizzazione dei dati in nostro possesso e dunque la loro analisi quantitativa anche tramite l'utilizzo dell'intelligenza artificiale. In questo modo, ci si propone di offrire un ausilio alla pianificazione di programmi infrastrutturali pubblici che possano generare benefici ambientali, sociali ed economici a lungo termine.

Abstract: Infrastructure, utilities, and welfare services must now be redesigned to make them sustainable and resilient, and mathematical models can provide an important contribution. Under current legislation, the use of mathematical and technological support, and more generally digitalization in infrastructure design and management, are strongly encouraged by recent legislation. This article will focus on issues related to road traffic, which can be effectively modeled using graph theory. Graph theory, in fact, allows the digitalization of our data and therefore its quantitative analysis, including through the use of artificial intelligence. In this way, we aim to provide support for planning public infrastructure programs that can generate long-term environmental, social, and economic benefits.

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. Il quadro giuridico della pianificazione urbanistica e della mobilità – 3. Pianificazione della viabilità stradale e teoria dei grafi – 4. Altre applicazioni della teoria dei grafi – 5. Conclusioni

1. Introduzione

Le infrastrutture, che siano esse servizi al trasporto, come strade, ferrovie o linee di trasporto pubblico, utilities, come energia o telecomunicazioni, o servizi di welfare come scuole o ospedali, rappresentano la struttura portante di ogni società moderna, principale catalizzatore dello sviluppo economico e della sostenibilità a lungo termine. Le scelte e le decisioni strategiche in tal senso devono di conseguenza essere accuratamente vagliate tenendo conto di fattori eterogenei quali impatto ambientale, aumento demografico, benessere sociale e vitalità economica. L'approccio tradizionale, basato unicamente sull'analisi costi-benefici, deve oggi essere superato da una prospettiva che consenta valutazioni più accurate che permettano di progettare asset equi, sostenibili e resilienti. La gestione dei dati e la loro analisi attraverso teorie matematiche, può rappresentare uno strumento prezioso per gli organi di governo, a livello nazionale o locale, nell'affrontare la pianificazione a lungo termine.

Una pianificazione sostenibile delle città moderne, passa certamente attraverso una riorganizzazione della loro viabilità, in primis ridistribuendo i flussi di traffico nella rete stradale esistente, scegliendo correttamente la destinazione d'uso dello spazio viario (sensi di marcia, piste ciclabili, corsie riservate al trasporto pubblico eccetera), ed individuando quindi le reali necessità di interventi più radicali che comportano costi e tempi di messa in opera importanti. Le scelte invece legate alla destinazione d'uso delle strade possono essere modificate molto più semplicemente e con costi molto più contenuti, ma, come sarà dimostrato nel seguito, possono comunque influire in modo significativo sul problema.

Dal punto di vista normativo, i concetti di sostenibilità e resilienza, centrali nell'analisi matematica della rete viaria, sono ormai principi cardine anche della legislazione urbanistica e di settore. La sostenibilità si traduce in

obiettivi normativi precisi, come la riduzione del consumo di suolo[1] [2], la riqualificazione del patrimonio edilizio esistente[3] e la valorizzazione ambientale del territorio[4]. La resilienza, intesa come capacità di un sistema di adattarsi ai cambiamenti e resistere a eventi critici, è un obiettivo esplicito nella pianificazione delle Città Metropolitane[5] e nella progettazione di infrastrutture strategiche.

Le teorie elaborate ad oggi dai maggiori architetti urbanisti possono essere utilizzate come linee guida. Secondo Peter Calthorpe[6], ad esempio, è fondamentale preservare l'ambiente naturale e la storia del territorio, il che, in un contesto come quello delle città italiane, rende la costruzione di nuove strade o l'ampliamento di quelle esistenti una soluzione cui far ricorso solo in casi estremi. Nell'ottica di una pianificazione ottimale della viabilità urbana, quindi, l'analisi della connettività stradale riveste un particolare interesse. Introdurre un modello matematico che guidi le scelte in tal senso, consente innanzitutto di ottenere risposte quantitative molto precise, ma soprattutto, fornendo un linguaggio estremamente strutturato, ci permette di esporre e quindi comprendere più chiaramente il problema e dunque di prevedere gli impatti di ciascun intervento. In questo articolo, si prenderanno in considerazione modelli mutuati dalla Teoria dei grafi.

La Teoria dei grafi è una branca della matematica discreta con una vasta gamma di campi applicativi. Non è un caso che il matematico americano John Dossey[7] abbia descritto la matematica discreta come la "matematica del nostro tempo": essa offre infatti strumenti fondamentali per affrontare questioni oggi centrali, come la modellizzazione, il pensiero algoritmico e i processi decisionali. I grafi, in particolare, possono costituire modelli di sistemi o di processi studiati nell'informatica, nell'ingegneria, nella biologia mole-

---

[1] *DECRETO-LEGGE 29 maggio 2024, n. 69.*
[2] *DECRETO LEGISLATIVO 22 gennaio 2004, n. 42.*
[3] *DECRETO-LEGGE 29 maggio 2024, n. 69.*
[4] *DECRETO LEGISLATIVO 28 maggio 2010, n. 85.*
[5] *Delibera n. 8/2016/SEZAUT/FRG e Relazione.*
[6] Calthorpe, P. s Sim Van der R. *Sustainable Communities: A New Design Synthesis for Cities, Suburbs and Towns*. San Francisco: Sierra Club Books. 1986.
[7] J. Dossey *Discrete Mathematics and the Secondary Mathematics Curriculum*. Reston, VA., National Council of Teachers of Mathematics 1991.

colare, ma anche nella geografia, analizzando appunto sistemi fluviali, trasporti o reti stradali, o nell'organizzazione aziendale. In molti casi, la teoria e le applicazioni pratiche si sono evolute in modo sinergico, basta pensare al problema del flusso massimo, di cui si tratterà in seguito, formulato inizialmente da T.E. Harris e F.S Ross[8] nel 1954 proprio per studiare il sistema ferroviario sovietico. Anche i primi algoritmi, l'algoritmo di Ford-Fulkerson[9] e quelli elaborati da Edmonds e Karp[10] e da Dinitz[11] furono elaborati proprio in funzione delle rispettive applicazioni.

Rispetto al tempo in cui sono state elaborate le teorie in questione, oggi può risultare determinante il ricorso all'intelligenza artificiale. Come si vedrà in seguito, infatti, il grafo da implementare nel caso della viabilità di una grande città, o se si prende in considerazione la rete viaria di una regione o di un distretto economico, è estremamente complesso e le variabili di cui tener conto sono molteplici. Anche senza considerare affatto la possibilità di incrementare la rete viaria, le sole modifiche nella destinazione d'uso ed il loro impatto sul flusso di veicoli devono tener conto di fattori complessi quali mutamenti sociali, cambiamenti di distribuzione demografica, impatto ambientale e resilienza per cambiamenti climatici. L'utilizzo dell'intelligenza artificiale, una volta elaborato il modello e quindi esplicitati i vari vincoli, consente di prendere in conto uno o più cambiamenti di una qualsiasi delle variabili in esame in modo rapido e versatile. L'IA rappresenta dunque un potente strumento sia per la costruzione del dataset da analizzare che per la sua elaborazione, mentre la Teoria dei giochi costituisce il modello teorico all'interno del quale i dati raccolti e le loro elaborazioni possono essere interpretati.

---

[8] Harris T. E. e Ross F. S., *Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities*, in *Research Memorandum*, Rand Corporation, 1955.

[9] Ford, L.R., Jr.; Fulkerson, D.R., *Flows in Networks*, Princeton University Press 1962.

[10] Edmonds, J.; Karp, R. M. (1972). *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems*, in *Journal of the ACM*. **19** (2) 1972: pp 248–264.

[11] Dinitz Y. . *Dinitz' Algorithm: The Original Version and Even's Version*. In Oded Goldreich; Arnold L. Rosenberg; Alan L. Selman (eds.). *Theoretical Computer Science: Essays in Memory of Shimon Even*. Springer 2006. pp. 218–240.

2. Il quadro giuridico della pianificazione urbanistica e della mobilità

Il metodo modellistico basato sulla teoria dei grafi e sull'intelligenza artificiale, presentato in dettaglio nel seguito, si inserisce nel più ampio contesto giuridico del governo del territorio, una funzione pubblica fondamentale volta a contemperare una pluralità di interessi[12]. La pianificazione urbanistica, infatti, non è solo funzionale all'ordinato sviluppo edilizio, ma anche al bilanciamento di diversi interessi pubblici che insistono sul medesimo territorio, quali la tutela ambientale, la salvaguardia del paesaggio e il benessere della collettività[13] [14]. Il principio cardine che governa la materia è quello della pianificazione, intesa come necessità di una "visione integrata di una determinata porzione di territorio" per garantirne l'ordinato sviluppo[15]. Questa visione integrata trova una corrispondenza diretta nel modello a grafo, che rappresenta la rete delle interconnessioni territoriali.

Nell'ordinamento italiano, la funzione pianificatoria è strutturata secondo un sistema "a cascata" che opera dal generale al particolare, coinvolgendo diversi livelli di governo. Sebbene la pianificazione urbanistica sia una funzione fondamentale dei Comuni, essa può essere conformata da leggi statali o regionali per la tutela di interessi sovracomunali[16]. A livello comunale, strumenti come il Piano Strutturale Comunale (PSC) delineano "le scelte strategiche di assetto e sviluppo" e tutelano "l'integrità fisica ed ambientale e l'identità culturale" del territorio, senza tuttavia conferire direttamente potestà edificatoria. Le strategie di mobilità, in particolare, vengono definite in strumenti specifici come i Piani Urbani della Mobilità Sostenibile (PUMS), che mirano a migliorare l'efficienza del sistema dei trasporti attraverso azioni come il potenziamento del trasporto pubblico locale, lo sviluppo della ciclabilità e la promozione dell'intermodalità.

---

[12] *Corte Cost., sentenza n. 51 del 23 aprile 2025.*
[13] *Corte Cost., sentenza n. 51 del 23 aprile 2025.*
[14] *DECRETO LEGISLATIVO 22 gennaio 2004, n. 42.*
[15] *Cass. Pen., Sez. 3, N. 26620 del 21-07-2025.*
[16] *Corte Cost., sentenza n. 51 del 23 aprile 2025.*

3. Pianificazione della viabilità stradale e teoria dei giochi

Si avvia l'esposizione procedendo alla definizione formale del modello matematico utilizzato, illustrandone contemporaneamente l'aderenza con la situazione in analisi.

Un grafo[17] è un qualsiasi insieme costituito da elementi, detti nodi, che possono essere collegati fra loro da linee dette archi. Nel caso in questione, i nodi possono essere gli incroci del quartiere o della città che si prende in esame, le strade che li collegano saranno gli archi. La viabilità, inoltre, è rappresentata da ciò che si definisce un grafo diretto, ossia un grafo in cui gli archi possono essere percorsi in una direzione, nella direzione opposta o in entrambe. Nella rappresentazione grafica, si usa una freccia che indica la direzione in cui l'arco può essere percorso.

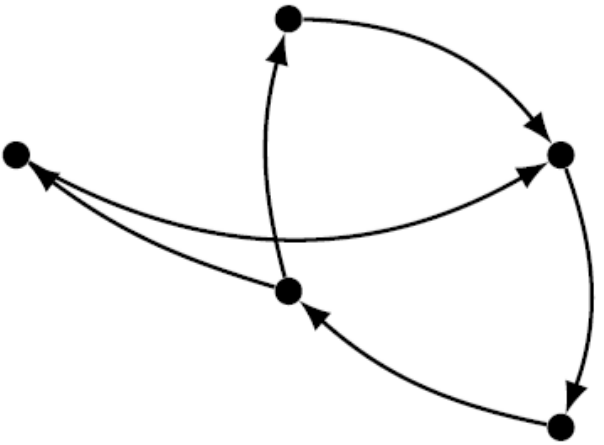

Fig. 1: un esempio di grafo diretto

Un grafo si dice semplice quando non comprende cappi, ossia archi che partono da un nodo ed arrivano al nodo stesso. Nelle nostre città, un cappio può essere rappresentato da una strada senza uscita che, una volta percorsa

[17] Diestel R. *Graph theory*, in *Graduate Texts in Mathematics*, Springer Berlin, Heidelberg , 2024.

in un senso, ci costringe a ripercorrerla nel senso opposto, tornando all'incrocio di partenza.

La densità di un grafo è la massima cardinalità (il numero di nodi) di un suo sottografo completo, ossia in cui ogni nodo sia collegato ad ogni altro tramite un arco. In questo senso, la densità stradale aumenta quando ad esempio si considerano piazze o rotatorie in cui confluiscono più strade, ossia incroci che sono direttamente collegati a molti altri incroci. Si dice invece che due nodi sono tra loro connessi se esiste un cammino, ossia una sequenza di archi, che permette di andare dall'uno all'altro. Il concetto di connettività è particolarmente interessante dal punto di vista in esame in quanto nell'immaginare la viabilità di una città è essenziale richiedere che il grafo sia connesso, ossia che sia possibile da ogni punto della città raggiungere ogni altro.

Un altro concetto essenziale è quello di ponte. In teoria dei grafi, un ponte è un arco eliminato il quale i due nodi che collegava non risultano più connessi, ossia non esiste nessun altro cammino che dall'uno conduca all'altro. Quello dell'esistenza di ponti è un aspetto potenzialmente molto negativo in una rete stradale. Si consideri infatti la possibilità che la strada che rappresenta un ponte (nel senso illustrato sopra) risulti interrotta, per problemi legati al maltempo, per manutenzione o a causa di un incidente stradale, questo isolerebbe un nodo o addirittura un insieme di nodi, in generale un sottografo, dal resto del grafo. La connettività del grafo, ossia la possibilità di raggiungere ogni nodo o almeno ogni sottografo, tramite il maggior numero possibile di cammini, diventa quindi uno dei valori da prendere maggiormente in considerazione, particolarmente quando il nodo in esame rappresenta un punto di particolare interesse urbanistico come una stazione ferroviaria, o un ospedale o una scuola. La connettività del grafo, in questo senso rappresenta la resilienza della rete stradale.

Un altro aspetto, parallelamente importante è impostare il grafo in modo da minimizzare la lunghezza dei cammini che collegano due nodi, ossia, in termini urbanistici, di fare in modo che non sia necessario un itinerario particolarmente tortuoso per rendersi da un punto ad un altro.

Per finire, in un grafo diretto (ossia un grafo in cui gli archi siano orientati) è possibile associare ad ogni arco un numero che ne indica la capacità;

nell'interpretazione urbanistica questo dato corrisponde al numero massimo di veicoli che possono transitare in una strada e dipende da caratteristiche strutturali della strada stessa (la larghezza, la qualità del fondo stradale, la pendenza, eccetera). In un grafo diretto per i cui archi sia fissata la capacità, si può definire la nozione di flusso. Un flusso è una funzione che associa ad ogni arco del grafo un numero reale positivo che deve soddisfare due condizioni: da una parte il flusso deve essere inferiore alla capacità dell'arco considerato e dall'altra sussiste il Principio di conservazione del flusso, ossia la somma dei flussi entranti in ciascun nodo deve essere uguale alla somma dei flussi da esso uscenti.[18] Questi due principi, sono immediatamente comprensibili quando si pensa al modello del traffico urbano; infatti ovviamente il numero di veicoli che transitano su una data strada non può essere superiore alla capacità della strada stessa, poiché in caso contrario si creeranno necessariamente ingorghi e rallentamenti. Anche il principio di conservazione del flusso ha un'interpretazione molto semplice, in quanto il numero di veicoli che arrivano ad un dato incrocio coincide con il numero di veicoli che dovranno poi necessariamente ripartire da esso.

Il concetto di flusso e quello di connettività di un grafo sono tra loro collegati, nella teoria dei grafi, dal Teorema del massimo flusso e del minimo taglio. Per analizzare il contenuto di questo teorema, si consideri un grafo diretto con una sorgente, ossia un nodo avente solo archi orientati in uscita, ed una foce, ossia un nodo avente solo archi orientati in entrata. Per il principio di conservazione del flusso, la somma dei flussi uscenti dalla sorgente sarà uguale alla somma dei flussi entranti nella foce; questo numero è detto valore di flusso del grafo. Il problema del massimo flusso, consiste nel trovare in una rete di flusso con una sola sorgente ed una sola foce, un flusso ammissibile che sia massimo. Il Teorema del massimo flusso e del minimo taglio garantisce che il massimo flusso uscente dalla sorgente sia uguale alla somma dei pesi degli archi compresi nel taglio minimo che sconnette il grafo considerato. Per una trattazione più ampia e più tecnica, che esula dagli scopi del presente articolo, si rimanda ai testi tecnici consacrati alla Teoria dei

[18] Per i Teoremi di flusso si veda ad esempio Malhotra V. M.,Pramodh Kumar M. e Maheshwari S.N., *An algorithm for finding maximum flows in networks*, in *Information Processing Letters*, vol. 7, n. 6, 1978, pp. 277-278.

grafi[19] [20]. Riassumendo per sommi capi, questo dimostra che migliorare la connettività del grafo, migliora il massimo flusso in esso ammissibile.

Consideriamo alcuni esempi per comprendere questa situazione. Se la città presa in esame ha una pianta simile a quella di Torino, ad esempio, si configura il caso di un grafo denominato grafo a griglia:

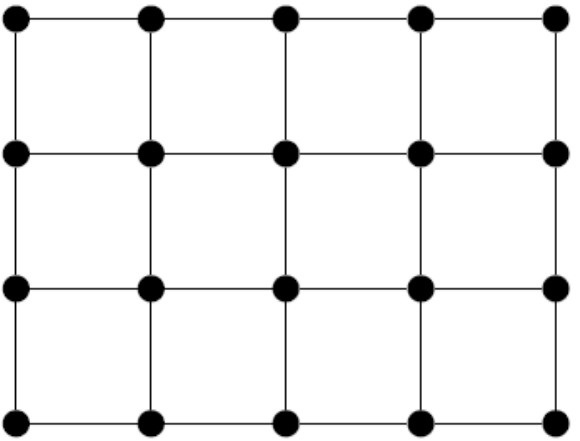

Fig. 2: un esempio di grafo a griglia

Il grafo a griglia ha un'ottima connettività perché cancellando due archi, il massimo che può accadere è che si sconnetta un unico nodo dal resto della rete. Questo significa che, compatibilmente con i valori di capacità degli archi del grafo, il problema di massimizzazione del flusso darà valori molto elevati.

Una situazione analoga si riscontra ad esempio con la famiglia dei grafi a stella poligonale concentrica di cui questo può essere un esempio:

---

[19] Sleator D.D. e Tarjan R.E., *A data structure for dynamic trees*, in *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 26, n. 3, 1983, pp. 362-391.

[20] Lawler E., *4. Network Flows*, in *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Dover, 2001, pp. 109-177.

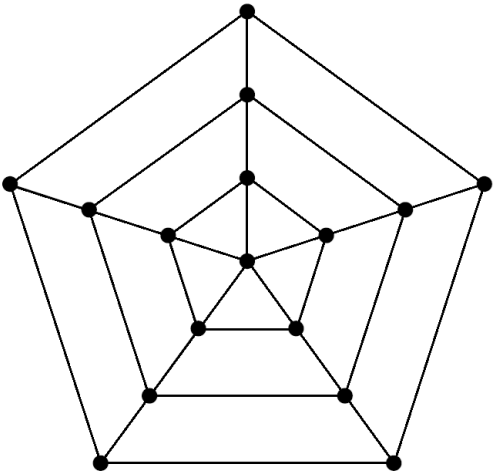

Fig. 3: un grafo a stella pentagonale concentrica

Questo genere di struttura si incontra ad esempio nell'urbanistica rinascimentale in cui tale scelta era legata a ragioni militari. Come nel caso precedente, il grafo ha un'alta connettività.

Nella realtà delle città italiane, però, molto spesso l'urbanistica ha assecondato la struttura topografica del territorio, ad esempio sposando le linee di livello dei rilievi montuosi. In questo caso si riscontra molto spesso la presenza di ponti (sia nel senso della teoria dei grafi illustrato sopra, sia in quello letterale) ed è difficile immaginare interventi che possano modificare in modo significativo la struttura del grafo in esame, ovvero della rete viaria oggetto di studio.

Proprio in questa situazione può essere interessante implementare il grafo, inserendo le capacità di ciascun arco, ed utilizzare risultati teorici e algoritmi di calcolo per ottimizzare il problema del massimo flusso. Per poter utilizzare la teoria dei grafi in questo senso, esistono due modi di rappresentare un grafo con una struttura dati utilizzabile da un programma: la lista delle adiacenze e la matrice delle adiacenze. Nel primo caso si elenca semplicemente, per ciascun nodo, la lista dei nodi cui esso è connesso (in uscita). La matrice delle adiacenze è invece una matrice con n righe ed altrettante colonne, n rappresentando il numero di nodi del grafo, in cui si riporta il va-

lore 1 se il nodo in riga è connesso al nodo in colonna, zero altrimenti. In generale, in un grafo diretto, la matrice che risulta non è simmetrica. La matrice delle adiacenze può rappresentare la capacità di ogni arco, se si utilizzano le corrispondenti capacità come entrate della matrice. Per una trattazione più dettagliata, si rimanda ad esempio al testo di R. Diestel[21].

Una volta inseriti i dati, è possibile utilizzare la struttura del grafo per ottimizzarne il flusso, variando l'orientazione degli archi, diminuendo la capacità in entrata a favore di quella in uscita o viceversa. Questo corrisponde ad interventi minimi in termini di infrastruttura, tagliando quindi costi e tempi di messa in opera, che massimizzano però il miglioramento in termini di viabilità. Gli aspetti tecnici dell'implementazione e dell'analisi dei dati, sono trattati in modo esteso nei testi tecnici consacrati all'utilizzo dei software di calcolo, in particolar modo SAGE[22].

Lo stesso tipo di implementazione può consentire di individuare i punti deboli del grafo in esame, ossia i nodi la cui scarsa capacità rappresenta un vincolo forte alla massimizzazione del flusso o la cui bassa connettività rende fragile l'equilibrio trovato. Questo permette di comprendere quali interventi siano necessari e dove e come nuove infrastrutture, ampliamento delle strade esistenti, costruzione di nuove, costituzione di linee di trasporto pubblico che diminuiscano il numero di veicoli, possano davvero incidere sul problema. In questo modo è possibile valutare l'impatto di opere importanti semplicemente confrontando i valori del grafo *ex ante* con quelli del grafo *ex post* per una corretta analisi anche in termini di costi-benefici.

Un altro vantaggio è quello di poter considerare sottografi del grafo in questione ed operare su di essi. Questo consente di lavorare indipendentemente sulla viabilità di un dato quartiere o area urbana, ma anche di prendere in considerazione come nodi non indiscriminatamente tutti gli incroci ma solo quei punti che rivestono un ruolo importante nella mobilità.

Come accennato sopra, l'implementazione stessa del grafo e il calcolo degli aspetti di esso rilevanti alla luce dell'impostazione metodologica assunta possono essere grandemente facilitati e migliorati dall'uso

[21] Diestel R. *Graph theory*, *Graduate Texts in Mathematics***,** Springer Berlin, Heidelberg 2024.
[22] Joyner D., Nguyen M. V., Phillips D. *Algorithmic Graph Theory and Sage* 2023.

dell'intelligenza artificiale. Un monitoraggio della rete viaria esistente, anche via satellite, analizzato dall'intelligenza artificiale, può fornire immediatamente i dati relativi alla capacità degli archi. Anche più significativo è l'utilizzo dell'intelligenza artificiale per rilevare i flussi e quindi completare i valori numerici del grafo. La rilevazione dei flussi, più semplice quando si tratta ad esempio di una rete ferroviaria come nel caso di Harris e Ross[23], non può essere svolta se si prendono in considerazione veicoli privati, se non in modo statistico. L'utilizzo dell'intelligenza artificiale sopperisce a questo problema, fornendo un dataset completo ed estremamente affidabile da analizzare.

4. Altre applicazioni della teoria dei grafi

Una conoscenza più approfondita della struttura del grafo, ottenuta definendo ulteriori proprietà, può fornire ulteriori interessanti indicazioni in vista di una corretta progettazione urbanistica.

Se si prende in esame un cammino, ossia una successione di nodi collegati ciascuno al successivo per mezzo di un arco, imponendo che ciascun arco venga percorso una ed una sola volta. In questo caso si parla di "cammino euleriano". La scelta del nome deriva dal fatto che fu proprio il matematico svizzero Eulero a risolvere, nel 1736, un problema riguardante la ricerca di un cammino siffatto, affrontando quello che era noto con il nome di *problema dei sette ponti di Königsberg*. Il problema è piuttosto semplice da enunciare: è possibile percorrere il centro di Königsberg (attualmente Kaliningrad, città facente parte di un exclave russa che si affaccia sul Mar Baltico), formato da quattro zone distinte separate dal fiume Pregel, attraversando tutti i sette ponti ma in modo da passare su ciascuno di essi una e una sola volta? Appare evidente come il problema possa essere riformulato in termini di un grafo in cui le quattro zone della città sono i nodi e i ponti sono gli archi;

[23] Harris T. E. e Ross F. S., *Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities*, in *Research Memorandum*, Rand Corporation, 1955.

si tratta quindi di determinare un cammino euleriano. Eulero concluse che un qualsiasi grafo è percorribile se e solo se ha tutti i nodi di grado pari (dove per grado di un nodo si intende il numero di archi che incidono sul nodo stesso) oppure se ha esattamente due nodi di grado dispari, la sorgente e la foce, secondo la terminologia introdotta nel paragrafo precedente.

Per il grafo dei ponti di Königsberg, (si veda la Figura 4), non è quindi possibile trovare il cammino richiesto[24].

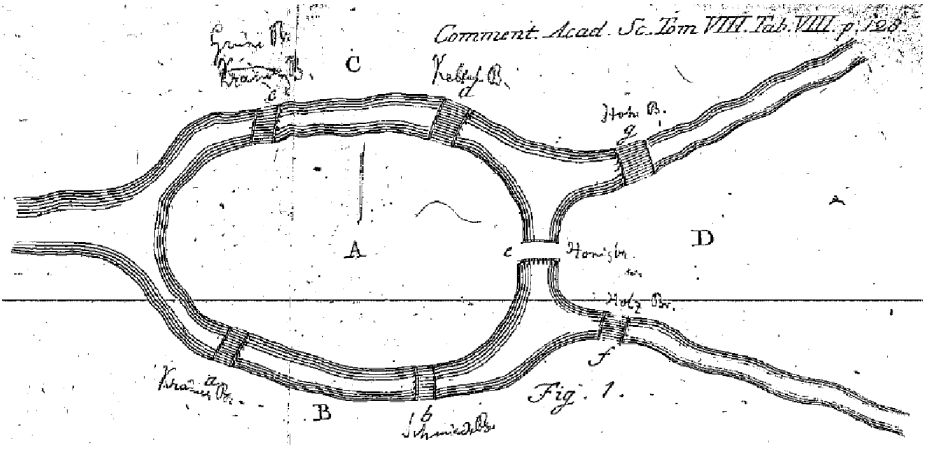

Fig. 4: mappa della città di Königsberg

La ricerca di un cammino euleriano (o di un circuito, se il nodo di partenza e quello di arrivo coincidono) riveste una grande importanza e, come già sottolineato in precedenza, trova numerose applicazioni concrete nella vita quotidiana e nella progettazione di servizi.

Si consideri ad esempio la gestione dei rifiuti urbani. Le aziende che si occupano della raccolta devono definire percorsi efficienti per i propri mezzi, con l'obiettivo di evitare che il mezzo adibito alla raccolta dei rifiuti passi più volte sulla stessa strada, in quanto ogni ripetizione comporta un aumento del tempo di lavoro, un maggior consumo di carburante e, quindi, costi più elevati. Se la rete stradale di un quartiere viene modellata come un grafo,

[24] Mazza, L. e Veredice, A. *Grafi e colorazioni: una proposta laboratoriale per il liceo matematico*. In *Archimede*: 3, 2021, pp. 136-154.

con gli incroci che rappresentano i nodi e le strade gli archi come mostrato in precedenza, progettare il giro di raccolta diventa essenzialmente un problema di ricerca di un cammino euleriano. Lo stesso ragionamento vale per altri settori della logistica; si pensi, ad esempio, al servizio di consegna della posta o alla distribuzione dei pacchi per mezzo di un corriere.

Anche questo genere di dati possono essere implementati nel modo illustrato nel paragrafo precedente, rendendo possibile un'analisi quantitativa del problema che può condurre ad evidenziare scelte strategiche ottimali.

5. Conclusioni

In conclusione, gli strumenti analitici come la teoria dei grafi e l'intelligenza artificiale non si pongono come un'alternativa al procedimento amministrativo di pianificazione, ma come un potente supporto decisionale per la Pubblica Amministrazione. L'attività di pianificazione è infatti descritta come un "atto complesso" che richiede l'elaborazione di dati di natura urbanistica, ambientale e socio-economica. I modelli matematici consentono di processare questa complessità in modo quantitativo, offrendo una base oggettiva per valutare le criticità della rete esistente: individuando "ponti" o nodi con scarsa capacità che limitano la resilienza e il flusso, come evidenziato dalla teoria; simulare l'impatto di interventi: confrontando scenari *ex ante* ed *ex post* per valutare l'efficacia di nuove infrastrutture o di modifiche alla viabilità, in coerenza con le finalità del Progetto di Fattibilità Tecnico-Economica (PFTE)[25]; ottimizzare la gestione dei servizi: definendo percorsi efficienti per la logistica o i servizi pubblici, analogamente a quanto già avviene in settori che utilizzano algoritmi di *routing* dinamico[26].

L'impiego di tali tecnologie è, inoltre, incoraggiato dalla normativa più recente, che promuove la digitalizzazione nella progettazione e gestione delle infrastrutture, come nel caso del Building Information Modeling (BIM), considerato un "digital twin" dell'opera in grado di ottimizzarne la gestione

[25] *Tar Lazio - 19690 del 2025.*
[26] *Corte di Giustizia Tributaria di 1° grado di Roma, sentenza n. 6354/2024.*

lungo l'intero ciclo di vita. L'analisi matematica della viabilità fornisce dunque strumenti tecnici per attuare con maggiore efficacia e consapevolezza i principi e gli obiettivi stabiliti dal legislatore in materia di pianificazione territoriale e mobilità sostenibile, supportando l'amministrazione nel compiere scelte strategiche fondate su dati oggettivi per il perseguimento dell'interesse pubblico.

La Teoria dei grafi, può quindi rappresentare, se opportunamente utilizzata, uno strumento estremamente potente per guidare le decisioni strategiche in campo urbanistico, poiché essa consente di evidenziare correttamente le criticità e le possibili soluzioni valutandone anche l'impatto immediato e quello a lungo termine. D'altro canto, l'uso dell'intelligenza artificiale, coniugata con una corretta modellizzazione matematica può costituire una risorsa determinante ai fini di una pianificazione accurata e strategicamente studiata.

Bibliografia

1. Calthorpe, P. e Sim Van der R. *Sustainable Communities: A New Design Synthesis for Cities, Suburbs and Towns*. San Francisco: Sierra Club Books. 1986
2. Calthorpe P.: *Urbanism in the Age of Climate Change*, Island Press, 2010.
3. Dossey, J. *Discrete Mathematics and the Secondary Mathematics Curriculum*. Reston, VA., National Council of Teachers of Mathematics 1991.
4. Dinitz Y. *Dinitz' Algorithm: The Original Version and Even's Version*. In Oded Goldreich; Arnold L. Rosenberg; Alan L. Selman (eds.). *Theoretical Computer Science: Essays in Memory of Shimon Even*. Springer 2006.
5. Diestel R. *Graph theory*, *Graduate Texts in Mathematics***,** Springer Berlin, Heidelberg 2024.
6. Edmonds J. e Karp R. M. . *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems* in *Journal of the ACM*. **19** (2) 1972.

7. Ford, L.R., Jr. e Fulkerson, D.R., *Flows in Networks*, Princeton University Press (1962).

8. Harris T. E. e Ross F. S., *Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities*, in *Research Memorandum*, Rand Corporation, 1955.

9. Malhotra V.M., Pramodh Kumar M. e Maheshwari S.N., *An algorithm for finding maximum flows in networks*, in *Information Processing Letters*, vol. 7, n. 6, 1978.

10. Mazza, L., e Veredice, A. (2021). Grafi e colorazioni: una proposta laboratoriale per il liceo matematico. Archimede: 3, 2021, pp 136-154.

11. Orlin J. B., *Max flows in O(nm) time, or better*, in *STOC '13 Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, 2013, pp. 765-774.

12. Schrijver A., *On the history of the transportation and maximum flow problems*, in *Mathematical Programming*, vol. 91, n. 3, 2002, pp. 437-445.

Diritto Mercato Tecnologia

Numeri Speciali

2016 Lo Stauto Etico Giuridico dei Campioni Biologici Umani
a cura di Dario Farace

2017 Il Mercato Unico Digitale
a cura di Gianluca Contaldi

2018 La Ricerca su Materiali Biologici di Origine Umana:
Giuristi e Scienziati a confronto
a cura di Alberto M. Gambino, Carlo Petrini e Giorgio Resta

2019 La Tassazione dell'Economia Digitale tra Sviluppi Recenti
e Prospettive Future
a cura di Alessio Persiani

La rivista "Diritto Mercato Tecnologia" intende fornire un costante supporto di aggiornamento agli studiosi e agli operatori professionali nel nuovo scenario socio-economico originato dall'interrelazione tra diritto, mercato e tecnologia, in prospettiva interdisciplinare e comparatistica. A tal fine approfondisce, attraverso studi nei settori privatistici e comparatistici, tematiche afferenti in particolare alla proprietà intellettuale, al diritto antitrust e della concorrenza, alle pratiche commerciali e alla tutela dei consumatori, al biodiritto e alle biotecnologie, al diritto delle comunicazioni elettroniche, ai diritti della persona e alle responsabilità in rete.

ISSN (Online Edition): 2239 -7442